Εφαρμογή στο θεώρημα του Sylow 15/12/16

Να οι μη ισόμορφες ομάδες τάξης $|G| = 2\cdot3\cdot5 = 30$

<u>Λύση</u>

Θα έχει $5\sim$Sylow : συμβολίζουμε με A

$3\sim$ — // — : — // — B

$2\sim$ — // — : — // — Γ

Πλήθος των A:

$$[G : N_G(A)] = 1 + 5\lambda_1$$

$$6 = [G:A] = [G : N_G(A)] = [N_G(A) : A]$$

Άρα

$6 \swarrow$ Μόνο μία 5-Sylow

$6 : 5\sim$Sylow

Πλήθος των B:

$$[G : N_G(A)] = 1 + 3\lambda_2$$

Άρα

$10 \swarrow$ Μόνο μία $3\sim$Sylow

$10 : 3\sim$Sylow

Να αποκλείσουμε $6 : 5\sim$Sylow και $10 : 3\sim$Sylow

$$|A| = 5 \Rightarrow A \cong \mathbb{Z}_5$$

$$B \cong \mathbb{Z}_3$$

$$\Gamma \cong \mathbb{Z}_2$$

Κάθε μία από τις 6 $5\sim$Sylow έχει 4 διαφορετικά στοιχεία

Δηλαδή $24+1$ (ταυτοτικό)

10 : 3~Sylow

Έταν 2 διαφορετικά η καθε μια
Συνολικά 2.10 χωρις το ταυτοτικό
Μέχρι τωρα έχουμε βρει:

24+1+20 : στοιχεια τουλαχιστον στη G

Ομως

$|G| = 30$

Αδύνατον

αρα μπορεί να έχει 1 : 5~Sylow ή
1 : 3~Sylow

Έχει λοιπόν η μια 5~Sylow ή 1 : 3~Sylow
Αρα αυτή θα είναι κανονική
Το γινομενο $AB \leq G$, $A \cap B = \{1\}$

Αρα

$|AB| = 15 = 3 \cdot 5$

Αν $3 \nmid 5-1 \Rightarrow AB$: κυκλική

AB κυκλική : $AB = \langle a \rangle$

Υπαρχει τουλάχιστον μια Γ με $|\Gamma| = 2$, $\langle b \rangle = \Gamma$
$o(b) = 2$

Αρα

η $G = AB \sqcup AB\,b \Rightarrow G = \langle a, b \rangle$

$bab^{-1} \in AB = \langle a \rangle$

$bab^{-1} = a^k \Rightarrow o(a) = o(a^k)$

$15 = \frac{15}{(15,k)} \Rightarrow (15,k) = 1 \Rightarrow k$ πρωτος με το 15

$k = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$, διοτι $\varphi(15) = \varphi(3)\varphi(5) = 2 \cdot 4 = 8$

$a = ba^k b = (bab)^k = (a^k)^k = a^{k^2} \Rightarrow 1 = a^{k^2-1}$

$15 / k^2-1$, $k = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$

$k = 1, 4, 11, 14 \Rightarrow$ Υπάρχουν 4 μη ισόμορφες O

γιατί $b^{-1} = b$ γιατί έχει τάξη 2

$O: k=1 \Rightarrow bab = a \Rightarrow O$: αβελιανή

$\Rightarrow O \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$: όλες οι Sylow είναι μοναδικές

$\mathbb{Z}_5 \times O'$ με μοναδική 5-Sylow

$|O'| = 6 \Rightarrow O' \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ή S_3

$\mathbb{Z}_5 \times S_3$

$\mathbb{Z}_3 \times O'$ με μοναδική 3-Sylow

$|O'| = 10 \Rightarrow O'$: όχι κυκλική τάξης 10. μια τέτοια είναι η D_5

$\mathbb{Z}_3 \times D_5$

Γνωρίζω ότι $|D_{15}| = 30$

$D_{15} = \langle a, b \rangle$

στροφή — συμμετρία

$o(a) = 15$ — $o(b) = 2$

$ba^i b = a^{-i}$

$bab = a^{14}$

Είναι αυτές που βρήκα μη ισόμορφες?

$Z(D_{15}) = \{1\}$

$Z(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5) = G$ (αβελ)

$Z(\mathbb{Z}_5\times S_3) = \mathbb{Z}_5$

$Z(\mathbb{Z}_3\times D_5) = \mathbb{Z}_3$

Το κέντρο είναι αναλλοίωτο και για να δείξω ότι είναι μη ισόμορφες, αρκεί να έχουν διαφορετικά κέντρα.

$S_3^{*} = \langle a, b\rangle$ $\qquad \langle a\rangle \cong \mathbb{Z}_3$

$D_5 = \langle a, b\rangle$ $\qquad \langle a\rangle \cong \mathbb{Z}_5$

$D_{15} = \langle a, b\rangle$ $\qquad \langle a\rangle \cong \mathbb{Z}_{15}$

* Αν και έχει ίδιο πλήθος στοιχείων με την $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2$ ο τρόπος που πολλαπλασιάζονται τα στοιχεία τους αλλάζει

6. Γινόμενα ομάδων

Απλή περίπτωση

Ορισμός

Η G καλείται εσωτερικό ευθύ γινόμενο των υποομάδων H και K αν: $H, K \triangleleft G$, $G = HK$, $H\cap K = \{1\}$

Πρόταση

Μια ομάδα G είναι το εσωτερικό γινόμενο των H και K $\Leftrightarrow$ $ab = ba$ για όλα τα $a\in H$ και $b\in K$ και κάθε στοιχείο της $g\in G$ γράφεται μοναδικά $g=ab$ για κάποια $a\in H$ και $b\in K$.

<u>Γενίκευση του προηγούμενου</u>

Η G καλείται το εσωτερικό ευθύ γινόμενο των υποομάδων H_i, $i\in J$, αν $H_i \lhd G$ $\forall i\in J$ η G γεννάται από τις H_i και

$H_i \cap \langle$ υποομάδα που γεννάται από τις υποομάδες $\rangle = \{1\}$ $\forall i\in J$

$$G \cong H_1 \times H_2 \times \dots$$

<u>Προσοχή!</u>

Αν $|J| = +\infty$, τότε ο συμβολισμός $G \cong H_1 \times H_2 \times \dots$ μπορεί να δώσει σύγχυση $\Rightarrow$ προς το πλήθος των στοιχείων που χρησιμοποιούμε.

Χρησιμοποιούμε μόνο πεπερασμένο πλήθος.

<u>Για άπειρο πλήθος όρων</u>

<u>Ορισμός</u>

Η G καλείται το εξωτερικό ευθύ γινόμενο των υποομάδων H_i, $i\in J$ εάν είναι το συνηθισμένο καρτεσιανό γινόμενο $G \cong \times_{i\in J} H_i$

Εδώ επιτρέπεται το άπειρο πλήθος.

<u>Αλλαγές στον Ορισμό</u>

Η G καλείται ημιευθύ γινόμενο των υποομάδων H και K, αν $H \lhd G$, $G=H\cdot K$, $H\cap K=\{1\}$

Παρατήρηση

$G = HK \qquad G/H \cong K$

6) Αυτομορφισμοί ομάδων

$Aut(G) = \{f : G \cong G\}$

$Inn(G) = \{\forall a \in G$ ορίζεται ο $G \xrightarrow{\cong} G$, $b = aba^{-1}\}$

$Inn(G) \trianglelefteq Aut(G)$

$Aut(G)/Inn(G)$ εξωτερικοί αυτομορφ.

Πρόταση

Έστω ότι η G είναι το ημιευθύ γινόμενο των $H \trianglelefteq G$ και $K < G$

1) Η απεικόνιση $\varphi: K \to Aut(H)$ με τύπο

$b \mapsto \varphi(b): H \to H$

$h \to \varphi(b)h = bhb^{-1}$ * είναι ομομορφισμός

*Μοιάζει με την εσωτερική, αλλά δεν είναι γιατί στην εσωτερική παίρνω το στοιχείο αυθαίρετα από την G, ενώ εδώ δε με νοιάζει να είναι αυθαίρετα από την K.

2) Κάθε στοιχείο της G έχει μοναδική αναπαράσταση $g = ab$ με $a \in H$ και $b \in K$

3) Το γινόμενο στην G δίνεται από $(a, b)(a', b') =$

$= a\underbrace{\varphi(b)(a')}_{\tilde{a}}\underbrace{bb'}_{\tilde{b}}$ $\qquad$ $H \; K \; H \; K$

$\Rightarrow a b a' b'$

Παράδειγμα

$D = \mathcal{S}_3 = \langle a, b \rangle$

$\langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_3 \quad , \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

$\langle a \rangle \trianglelefteq D$

$\varphi : K \to Aut(H)$

$\mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_{3-1} = \mathbb{Z}_2$

Άρα
υπάρχουν 2 τέτοιες απεικονίσεις:
η ταυτοτική και η αντίθεση

$\mathbb{Z}_3 \xrightarrow{1} \mathbb{Z}_3$

$\mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$

$2 \to 2 \equiv -1$

$\varphi : \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\text{αυτ}} \mathbb{Z}_2$

1) φ: ταυτοτική

$a^i b^j \in \mathcal{S}_3 = \{1, a, a^2, b, ab, a^2 b\}$

$(a^i b^j)(a^k b^\lambda) = a^i \underbrace{\varphi(b^j)}_{\text{ταυτ.}} (a^k) b^j b^\lambda$

$= a^i a^k b^{j+\lambda} = a^{i+k} b^{j+\lambda}$

Αυτό το
γινόμενο μας δίνει $D \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

2) Η φ δίνει στο στοιχείο το αντίθετο ~αντίστροφο

Δηλ. $\varphi(b)(a) = a^2$

$(ab)(ab) = a\varphi(b)(a) \cdot bb = a a^2 b^2 = 1$

$abab = aa^2 = 1$

Με $\varphi: K \cong \mathbb{Z}_2 \to Aut(H) \cong Aut(\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_2$

να μην είναι τετριμμένη, το ημιευθύ γινόμενο γίνεται S_3.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι η D_n είναι το ημιευθύ γινόμενο των $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$

Ισομετρίες στον $\mathbb{R}^n$

$$O(n) = \{ A \text{ ορθογώνιος πίνακας } AA^t = I \}$$

Μεταφορές $\mathbb{R}^n$

Ισομετρίες είναι το ευθύ γινόμενο των $O(n)$ και $\mathbb{R}^n$

Ερώτημα

Έστω H και K ομάδες.

Υπάρχουν ομάδες G ώστε $H \triangleleft G$, $K \leq G$

$G = HK$ και $H \cap K = \{1\}$?

Απάντηση

Ναι, τα ημιευθέα γινόμενα των H και K και όλες οι μη ισόμορφες δίνονται από

$$\varphi: K \to Aut(H)$$

Παράδειγμα

$$H \cong \mathbb{Z}_n \text{ και } K \cong \mathbb{Z}_2 \quad \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{απλή}} \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2 \quad \varphi: \text{τετριμ.} \\ \xrightarrow{\text{άλλη}} D_n \quad \varphi: \text{όχι τετριμ.} \end{array}$$

Όταν η G δίνεται μέσω των H, K και $\varphi: K \to Aut(H)$, τότε η G συμβολίζεται $H \times_\varphi K$ και το γινόμενο της ορίζεται

$$|G| = |H| \cdot |K|$$

από $(h_1 k_1)(h_2 k_2) = h_1 \varphi(k_1)(h_2) k_1 k_2$

- Έχουμε $\mathbb{Z}_3$ και $\mathbb{Z}_2$

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}_3 & \mathbb{Z}_2 \\ \wr\wr & \wr\wr \\ C_3 = \langle a \rangle & C_2 = \langle b \rangle \\ = \{1, a, a^2\} & = \{1, b\} \end{array}$$

$$\mathbb{Z}_3 \xrightarrow{\cong} C_3$$

$$\begin{aligned} \{0\} &\to 1 \\ \{1\} &\to a \\ \{2\} &\to a^2 \\ [1]+[2] &\to a^1 \cdot a^2 \\ [n] &\to a^n \\ [n+m] &\to a^{n+m} = a^n \cdot a^m \end{aligned}$$

<u>πχ</u> $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ γνώριμο

$$x \to e^x$$
$$x+y \to e^{x+y}$$

$$\varphi : C_2 \cong \mathbb{Z}_2 \xrightarrow[\text{ομομορφ.}]{} Aut(C_3 \cong \mathbb{Z}_3)$$

$$C_3 \xrightarrow{\cong} C_3$$

$$a \to a \quad \text{ή} \quad a \to a^2$$

Πρέπει να το στείλω υποχρεωτικά σε γεννήτορα γιατί αλλιώς είναι χάος

$g: C_2 \cong \mathbb{Z}_2 \xrightarrow[\text{ομομορφ}]{} Aut\,(C_3 \cong \mathbb{Z}_3) = \{ f_1 = \text{ταυτοτ},\ f_2 = \text{αντιστρ} \}$

Άρα

$C_3 \xrightarrow{f_1 \cong} C_3$ ή $C_3 \xrightarrow{f_2 \cong} C_3$

$a \to a$ $\qquad a \to a^2 = a^{-1}$

$g: C_2 \cong \mathbb{Z}_2 \to Aut\,(C_3 \cong \mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_2 \cong C_2$

$b \to g(b)$ έχει δύο επιλογές f_1, f_2

Δύο περιπτώσεις

$g: C_2 \to Aut\,(C_3)$

$b \to g(b)$ αντιστροφή $= f_2$

Να εξετάσουμε τι γινόμενο ορίζει η g στο σύνολο $C_3 \times C_2$.
Τότε το σύνολο $C_3 \times C_2$ θα -"- ομάδα και θα συμβολίζεται:

$C_3 \times_g C_2$

Το σύνολο $C_3 \times C_2 = \{(1,1), (1,b), (a,1), (a,b), (a^2,1), (a^2,b)\}$

$(1,b)\,(1,b) = (1\,g(b)(1),\ bb) = (11,\ b^2) = (1,1)$

Ενώ

$(x,y)\,(1,1) = (x,y)$

$(x\ g(y)(1),\ y \cdot 1) = (x \cdot 1,\ y) = (x,y)$

Άρα

είναι ταυτοτικό

$o((1,b)) = 2$

$$(a,1)(a,1) = (a\,g(1)(a),\ 1\cdot 1) = (a^2,1)$$

$$(a^2,1)(a,1) = (a^2 g(1)(a),\ 1\cdot 1) = (a^3,1) = (1,1)$$

Επίσης

Ο.ν.δ.ο.

$$bab = a^2$$